Université d'Orléans
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1994

Option : DEUG A

MATHÉMATIQUES

DURÉE TOTALE : 4 heures - COEFFICIENT : 4

La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation globale de la copie. Jusqu'à 2 points supplémentaires seront attribués à la présentation et la rédaction.

NOTATIONS GÉNÉRALES. — *Dans tout ce texte* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels,* $\mathbb{N}^*$ *l'ensemble des entiers strictement positifs,* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels,* $\mathbb{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs et* $\mathbb{R}[X]$ *l'anneau des polynômes à une indéterminée* X *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

Partie I

1. Soit S un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et h une fonction numérique définie et continue sur le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

1.1 Observant que la fonction polynôme S peut se mettre sous la forme $S = R + T$, où R et T sont des polynômes respectivement pair et impair, montrer que

$$\int_0^{2\pi} h(\cos^2 x)\, S(\cos x)\, dx = \int_0^{2\pi} h(\cos^2 x)\, R(\cos x)\, dx \,. \tag{1}$$

1.2 Dans le cas où : la partie paire de S n'est pas nulle et à coefficients positifs, et h est positive et ne s'annule pas partout sur le segment $[0,1]$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} h(\cos^2 x)\, S(\cos x)\, dx > 0 \,. \tag{2}$$

1.3 Établir l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} h(\cos^2 x)\, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\cos^2 x)\, dx \,. \tag{3}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \qquad \text{et} \qquad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \,.$$

2.1 Sans les calculer, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = B_n$.

2.2 Établir une relation de récurrence simple entre A_{n+2} et A_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_{2k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k \cdot k!)^2} \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$A_{2k+1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1} = \frac{(2^k \cdot k!)^2}{(2k+1)!} . \tag{5}$$

3. On considère la série entière de terme général

$$u_n(t) = A_{2n}\, t^{2n} . \tag{6}$$

3.1 Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

3.2 Montrer que cette série est convergente pour tout $t \in]-1,1[$, et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\, t^{2n} = \frac{\pi}{2} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} . \tag{7}$$

Partie II

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on consière la fonction numérique g_t définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_t : x \longmapsto g_t(x) = 1 - t \cos x . \tag{8}$$

On pose $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid g_t(x) \neq 0\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on consière la fonction f_n définie sur D par

$$f_n(x,t) = [g_t(x)]^{-n} . \tag{9}$$

4.1 Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$, l'on a

$$g_t([0,\pi]) = g_t(\mathbb{R}) = [1-|t|, 1+|t|] \subset \mathbb{R}_+^*$$

et que, pour tout $t \in [0,1]$, l'on a

$$g_t(\,]0,2\pi[\,) \subset \mathbb{R}_+^* .$$

4.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]-1,1[$, l'intégrale :

$$I_n(t) = \int_0^{2\pi} f_n(x,t)\, dx$$

a un sens et qu'elle est strictement positive.

4.3 Montrer que

$$I_n(t) = 4\sum_{k=0}^{r} C_n^{2k}\, t^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{(1-t^2\cos^2 x)^n}\, dx\ ,$$

où $t \in]-1,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et r est le plus grand entier naturel tel que $2r \leq n$. En déduire que I_n est paire sur $]-1,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dans cette question on propose une première méthode pour calculer l'intégrale $I_n(t)$ utilisant une récurrence sur n.

5.1 Énoncer le théorème de dérivation d'une intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre sur un intervalle (*Dérivation sous signe somme*).

5.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $I_n : t \longmapsto I_n(t)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $I_n'(t)$. En déduire une relation simple entre I_{n+1}, I_n et I_n' sur $]-1,1[$.

5.3 Calculer $I_1(t)$ et $I_2(t)$, pour $t \in]-1,1[$.

5.4 Calculer $I_3(t)$ et $I_4(t)$, puis $I_5(t)$ et $I_6(t)$, pour $t \in]-1,1[$.

5.5 Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \in]-1,1[$:

$$I_{2m-1}(t) = (1-t^2)^{\frac{3}{2}-2m}\, P_m(t^2)\ , \tag{10}$$

$$I_{2m(t)} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}-2m}\, Q_m(t^2) \tag{11}$$

où P_m et $Q_m \in \mathbb{R}[X]$ non nuls, de même degré $m-1$ et à coefficients positifs.

Partie III

6. On se propose maintenant de calculer l'intgrale $I_n(t)$ en effectuant un changement de variable. Pour tout $t \in]-1,1[$, on désigne par $\delta_t : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\delta_t(\theta) = \frac{t+\cos\theta}{g_{-t}(\theta)}\ . \tag{12}$$

6.1 Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$, la fonction δ_t définit une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. En déduire que $\delta_t(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

6.2 Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$, la fonction $\varphi_t = \mathrm{Arc}\cos \circ\ \delta_t$, où $\circ$ est la composition des applications, définit une bijection strictement croissante de $[0,\pi]$ sur $[0,\pi]$ et qui est continûment dérivable sur $[0,\pi]$. Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, calculer la dérivée $\varphi_t'(\theta)$.

6.3 Calculer l'intégrale $I_n(t)$ en effectuant le changement de variable admissible $x = \mathrm{Arc}\cos(\delta_t(\theta))$. En déduire que les polynômes définis dans les relations (10) et (11) sont :

$$P_m = \pi \sum_{k=0}^{m-1} C_{2(m-1)}^{2k}\, \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(k!)^2}\, X^k$$

$$Q_m = \pi \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2k}\, \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(k!)^2}\, X^k\ .$$

Partie IV

7. On se propose dans cette partie d'étudier $I_n(t)$, lorsque $n \to \infty$ ou $t \to \pm 1$.

7.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, on a $I'_n(t) \geq 0$; de même que, pour tout $t \in]-1,0]$, on a $I'_n(t) \leq 0$; l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $t = 0$.

7.2 Montrer que pour tout $t \in]-1,1[-\{0\}$ la suite $\left(I_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que la suite $\left(I_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et donner sa valeur.

7.3 Montrer que pour tout $t \in]-1,1[-\{0\}$ la suite $\left(I_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, on pose

$$J_n(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_n(x,t)\,dx\,. \tag{13}$$

8.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,1]$, $J_n(t)$ a un sens.

8.2 Montrer que la fonction $t \longmapsto J_n(t)$ est continue sur $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8.3 Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, la limite de $I_n(t)$, lorsque $t \to 1$ par valeurs inférieures, est $+\infty$.

8.4 Déduire de ce qui précède la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1-\cos x)^n}\,.$$

Partie V

9. Pour un réel t donné, on consière la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_t : x \longmapsto \phi_t(x) = \begin{cases} \alpha\, g_t(x) & \text{si } x \in [0,2\pi] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [0,2\pi] \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.

9.1 Montrer que pour une valeur du paramètre α indépendante t, la fonction ϕ_t peut être la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X. Dans la suite on affecte à α cette valeur.

9.2 Tracer les courbes de la densité de probabilité et de la fonction de répartition $F(x) = \text{Prob}\,\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} \phi_t(u)\,du$ de la variable aléatoire X .

9.3 Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\sigma^2(X)$ de la variable aléatoire X.